Concours EIA
Ecoles d'Ingénieurs Associées

Session de mai 2001

Epreuve de MATHEMATIQUES - durée : 3 heures

Attention	- aucun document autorisé. - l'usage de la calculatrice est interdit. - l'épreuve comporte 1 problème ; les parties I, II et III sont indépendantes.

Notations

E_0 désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle :

$I = [-1 ; 1]$.

E_2 désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et de classe C^2 sur l'intervalle I.

On considère l'application φ définie par :

$$\forall\ f \in E_2\ ;\ \forall\ g \in E_2\ ;\ \varphi(f;g) = \int_{-1}^{1} f(t) \times g(t) \times (1-t^2)^{\alpha}\, dt$$

où α est un nombre réel tel que $\alpha > -\frac{1}{2}$.

On se propose d'étudier quelques propriétés de cette application et de certains ensembles particuliers.

I. Première Partie : Etude de trois exemples

Déterminer $\varphi(f;g)$ dans les trois cas suivants.

1) $f(t)=t$ et $g(t)=1$

2) $f(t)=\sin(t)$ et $g(t)=1+t^2$, (l'observation est plus importante que des calculs)

3) $f_n(t)=t^n$ (n étant un entier naturel) et $g(t)=1$, on note $I_n=\varphi(f_n;g)=\int_{-1}^{1} t^n\times(1-t^2)^\alpha\,dt$

   a) Calculer I_{2n+1}

   b) Montrer que $I_{2n}=2\int_0^1 t^{2n}\times(1-t^2)^\alpha\,dt$, puis que la suite (I_{2n}) est monotone. Est-elle convergente ?

   c) Montrer que pour $n\geq 1$ on a :

$$0\leq I_{2n}\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(u)du\,.$$

   d) Démontrer que pour tout réel X de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $0\leq I_{2n}\leq 2X\sin^{2n}(X)+(\pi-2X)$

   e) En déduire que $0\leq\lim_{n\to+\infty} I_{2n}\leq\pi-2X$.

   Quelle est la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$?

II. Deuxième Partie : Caractérisation de φ

1) Démontrer que φ est définie sur $E_2\times E_2$.

   a) Démontrer que pour tout élément de E_2, on a : $\varphi(f;f)\geq 0$.

   b) A quelle condition a-t-on : $\varphi(f;f)=0$?

2) Démontrer que φ est un produit scalaire sur E_2.

3) Peut-on avoir $\varphi(f;g)=0$ avec deux fonctions f et g non identiquement nulles sur I ?

III. Troisième Partie : Etude d'une application de E_2 dans E_0

On considère l'application π définie par :

$\forall\ f \in E_2\ ;\ \pi(f) = \hat{f}$ définie par $\hat{f}(t) = (1-t^2)\times f''(t) - 2\times(\alpha+1)\times t \times f'(t)$

1) Montrer que π est un homomorphisme de E_2 dans E_0.

2) a) Déterminer $\dfrac{d}{dt}\left[(1-t^2)^{\alpha+1} f'(t)\right]$

b) En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} \hat{f}(t)g(t)(1-t^2)^{\alpha}\,dt = -\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)(1-t^2)^{\alpha+1}\,dt$

c) Démontrer que $\varphi\left(\hat{f};g\right) = \varphi\left(f;\hat{g}\right)$

IV. Quatrième Partie : Espace des polynômes

On désigne par X_n l'ensemble des restrictions à [-1 ; 1] des polynômes de degré inférieur à n, où n est un entier naturel. On note P_k la restriction à [-1 ; 1] du polynôme définie par $P(x) = x^k$.

1) a) Déterminer $\hat{P}_k$ pour $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$

b) En déduire que X_n est stable par π.

2) a) Déterminer la matrice de π dans la base $(P_0\ ;\ P_1\ ;\ \ldots\ ;\ P_n)$ de X_n.

b) Déterminer le spectre de π.

V. Cinquième Partie : Famille orthogonale

Soit P un élément de degré n de X_n tel que $\varphi\left(P_k;P\right) = 0 \quad \forall k \in \{0;1;2;...;n-1\}$

1) a) Démontrer que $(P\ ;\ P_0\ ;\ P_1\ ;\ \ldots\ ;\ P_{n-1})$ est une base de X_n.

b) Démontrer que $\varphi\left(\hat{P};P_k\right) = 0 \quad \forall k \in \{0;1;2;...;n-1\}$.

2) a) Soit $A = vect\left(P_0;P_1;\cdots;P_{n-1}\right)$. Déterminer une base de A.

b) Justifier l'existence d'une base orthogonale $\{Q_0;Q_1;...;Q_{n-1}\}$ de A telle que $\deg(Q_k) = k$

c) Démontrer que $(P\ ;\ Q_0\ ;\ Q_1\ ;\ \ldots\ ;\ Q_{n-1})$ est une base orthogonale de X_n.

3) a) Démontrer que $\varphi\left(\hat{P};Q_k\right) = 0 \quad \forall k \in \{0;1;2;...;n-1\}$.

b) En déduire que $\hat{P}$ et P sont colinéaires.

c) On note a_n le coefficient du terme de degré n dans le polynôme P. Déterminer en fonction de a_n le coefficient $\hat{a}_n$ du terme de degré n dans $\hat{P}$.

d) En déduire la valeur du coefficient de colinéarité λ_n tel que $\hat{P} + \lambda_n P = 0$.

VI. Sixième Partie : Construction d'une famille orthogonale

On note f la fonction définie sur [- 1 ; 1] par $f(t) = (1-t^2)^{n+\alpha}$, où n est un entier naturel non nul.

1) a) Déterminer l'expression des trois premières dérivées de f.

b) Démontrer par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \{1;2;...;n\} \quad \frac{d^p}{dt^p} f(t) = (-1)^p 2^p (n+\alpha)(n+\alpha-1)...(n+\alpha-p+1)(1-t^2)^{n+\alpha-p} S_p(t)$$

où S_p est un polynôme de degré p tel que $S_p(1)=1$.

2) a) Démontrer que $\varphi(P_0; S_n) = 0$.

b) Démontrer que : $\forall k \in \{0;1;2;...;n-1\} \quad \varphi(P_k; S_n) = 0$.

c) En déduire que pour tous entiers naturels non nuls et différents n et m on a :

$\varphi(S_m; S_n) = 0$.